

$$\text{Given } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

We know,

$$A = IA$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} A$$

$$R_2 \rightarrow R_2 - 2R_1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2-2 & -1-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} A$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} A$$

$$R_2 \rightarrow \frac{-1}{5} R_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{+2}{5} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix} A$$

$$R_1 \rightarrow R_1 - 2R_2$$

$$\begin{bmatrix} 1-2 \times 0 & 2-2 \times 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-2 \times \frac{2}{5} & 0-2 \left(-\frac{1}{5}\right) \\ \frac{+2}{5} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix} A$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix} A$$

$$\text{as } I = A^{-1}A$$

$$\therefore A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}$$